2023/2024 British Mathematical Olympiad 2ª ronda P3 de 4

Doubt Yourself

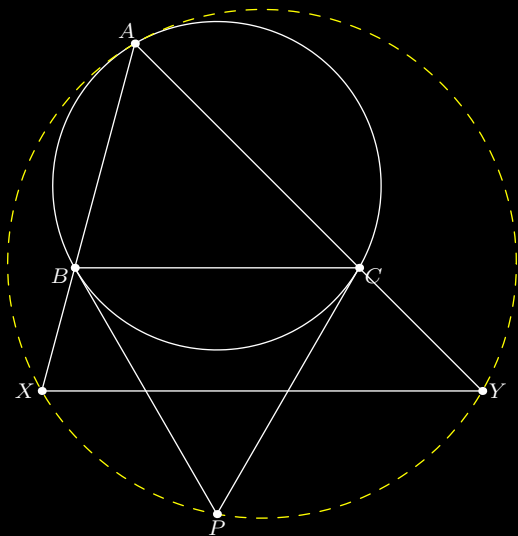
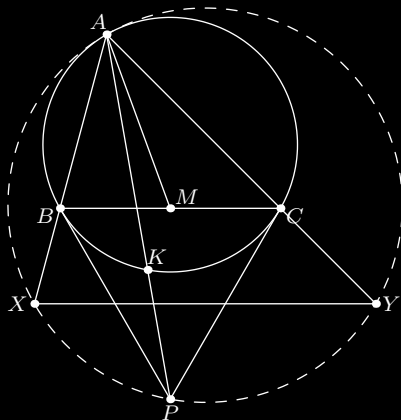
André Pinheiro

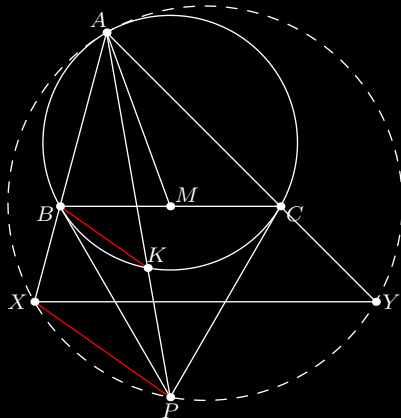
Fevereiro de 2024

Problema

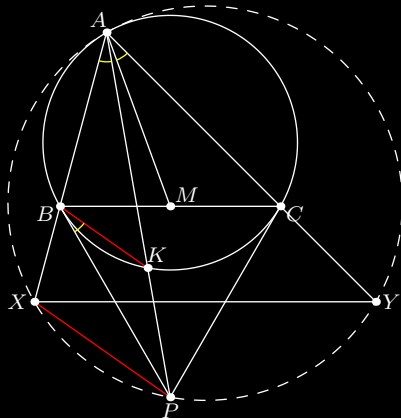
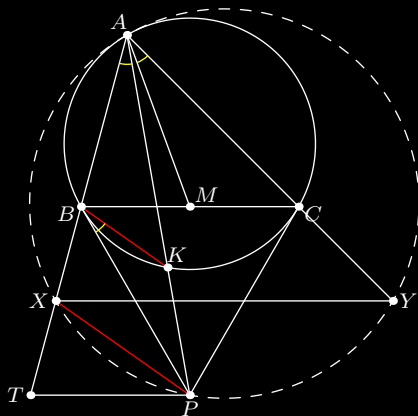
Seja ABC um triângulo acutângulo com $AB > AC$. Seja P o ponto de interseção das tangentes do circuncírculo de ABC em B e C. A reta formada pelos pontos médios dos segmentos PB e PC interseta AB e AC em X e Y respetivamente.

Prove que $AXPY$ é cíclico.

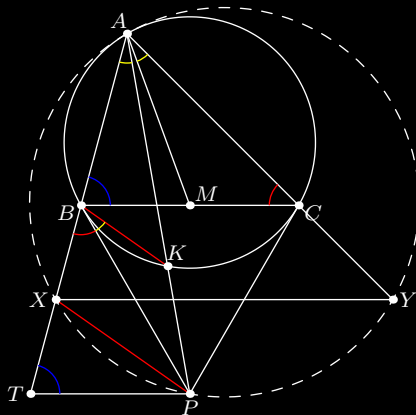
Solução

Solução

Seja M o ponto médio de BC e K a interseção de AP com o circuncírculo. É bastante conhecido que AP é a A-symmedian do triângulo ABC, isto é, $\angle BAP = \angle MAC$.

Solução

Seja M o ponto médio de BC e K a interseção de AP com o circuncírculo. É bastante conhecido que AP é a A-symmedian do triângulo ABC, isto é, $\angle BAC = \angle MAC$.

Parece que BK e XP são retas paralelas e se assumirmos que isso é verdade, conseguimos resolver o problema. Portanto, vamos tentar provar isso.

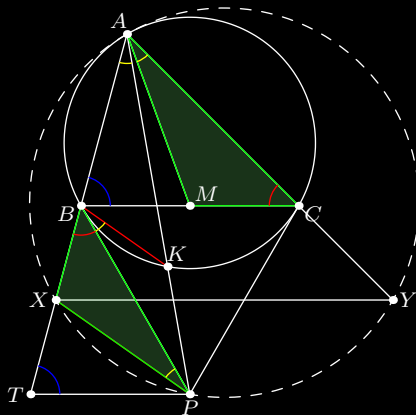
Solução

Ora, dado que o circuncírculo de ABC é tangente à reta BP, então temos que $\angle BAK = \angle KBP$. Vamos tentar provar que $\angle KBP = \angle BPX$.

Ora, dado que o circuncírculo ABC é tangente à reta BP, então temos que $\angle BAK = \angle KBP$. Vamos tentar provar que $\angle KBP = \angle BPX$.

Seja T a reflexão de B sobre X. Como a reta XY passa pelos pontos médios, então $XY//BC$. Além disso, como $BX = XT$, temos $XY//TP$.

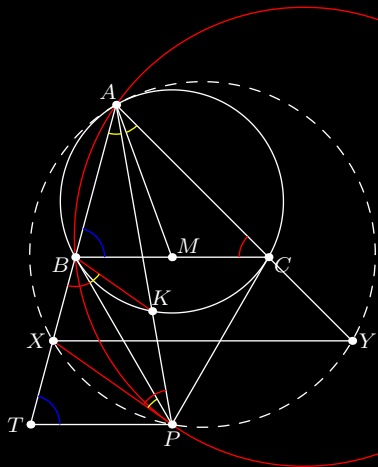
Solução

Ora, dado que o circuncírculo ABC é tangente à BP, então temos que $\angle BAK = \angle KBP$. Vamos tentar provar que $\angle KBP = \angle BPX$.

Seja T a reflexão de B sobre X. Como a reta XY passa pelos pontos médios, então $XY//BC$. Além disso, como $BX = XT$, temos $XY//TP$.

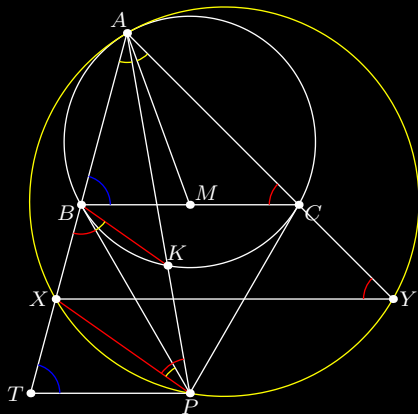
Resulta por angle chasing que $\angle ABC = \angle ATP$ e $\angle ACB = \angle TBP$, ou seja $\triangle ABC \sim \triangle TBP$.

Solução

Dado que $\triangle ABC \sim \triangle TBP$ e que $BX = XT$, temos que $\triangle BXP \sim \triangle AMC$.

Portanto, temos consequentemente que $BK // XP$.

Solução

Dado que $\triangle ABC \sim \triangle TBP$ e que $BX = XT$, temos que $\triangle BXP \sim \triangle AMC$.

Portanto, temos consequentemente que $BK // XP$. Como $\angle BAP = \angle BXP$, a circunferência que passa por A, B, P é tangente à reta XP em P e assim temos $\angle XBP = \angle XPA$.

Solução

Ainda temos que como $BC//XY$, então $\angle ACB = \angle AYX$.

Portanto, dado que $\angle XPA = \angle AYX$, temos que $AXPY$ é cíclico. ■